

# גיאומטריה

## זוויות

### מבוא

בשנים קודמות למדתם את נושא הזוויות.

מטרתנו בפרק זה היא לחזור על המושגים שנלמדו ולהעמיק את הלימוד בנושא זה.

#### • זווית



נוצרת על-ידי שתי קרניים היוצאות מנקודה אחת.

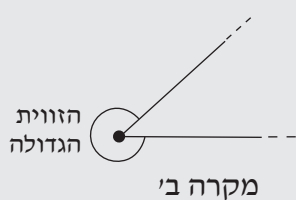
הנקודה נקראת **קדקוד הזווית**.

הקרניים נקראות **שוקי הזווית**.

למעשה נוצרות שתי זוויות: האחת קטנה, והאחרת גדולה

(פרט לזווית שטוחה, שבה נעסוק בהמשך).

נהוג לסמן את הזווית שאליה מתכוונים באמצעות קשת.



שימו לב! כאשר לא מציינים את הזווית המסוימת, מתכוונים תמיד לזווית הקטנה מבין שתי הזוויות

הנוצרות על-ידי הקרניים (מקרה א').

#### • זווית שטוחה

זווית ששוקיה יוצרות ישר.

בשונה מזוויות אחרות, במקרה זה הקרניים יוצרות

שתי זוויות שוות (ולא אחת גדולה ואחת קטנה), ושתיהן זוויות שטוחות.





מה נלמד?

- ✓ נלמד לסמן זוויות בדרכים נוספות.
- ✓ נלמד למדוד זוויות.
- ✓ נלמד על זוויות שוות וזוויות שונות.
- ✓ נלמד לחבר ולחסר זוויות.



על מה נחזור?

- ✓ נחזור על סימון זוויות שלמדנו בתחילת השנה.

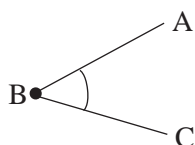
לדרך...

## תרגילים

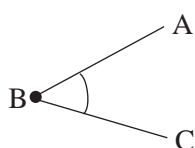
(התשובות לתרגילים בפרק זה - בעמ' 196-197)



### סימון הזווית - תזכורת



- על-ידי אות לטינית אחת גדולה, שמציינת את קדקוד הזווית (בתנאי שיש רק זווית אחת בעלת אותו קדקוד).  
בכתיב מתמטי:  $\sphericalangle B$ .

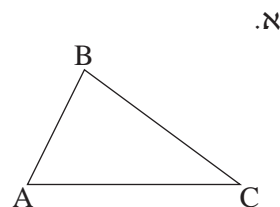
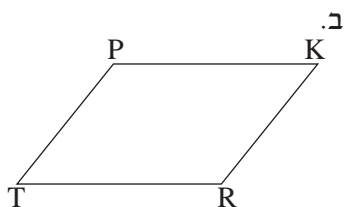
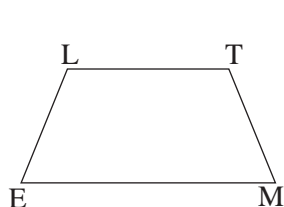


- על-ידי שלוש אותיות לטיניות גדולות, וסימן  $\sphericalangle$  לפניהן: האות האמצעית מציינת את קדקוד הזווית, ושתי האותיות האחרות הן נקודות על שוקי הזווית.  
בכתיב מתמטי:  $\sphericalangle ABC$  או  $\sphericalangle CBA$ .

רשמו בשני אופנים כל אחת מהזוויות במצולעים הבאים:

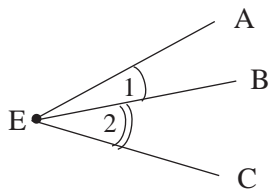
(1) באמצעות אות אחת.

(2) באמצעות שלוש אותיות.



II

סימון הזווית - אפשרויות נוספות - תזכורת

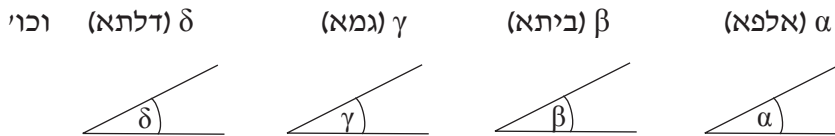


• על-ידי מספרים המסומנים בתוך הזווית.

בכתיב מתמטי:  $\sphericalangle 1$  או  $\sphericalangle E_1$ .

בכתיב מתמטי:  $\sphericalangle 2$  או  $\sphericalangle E_2$ .

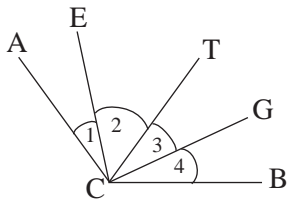
• על-ידי אותיות יווניות קטנות:



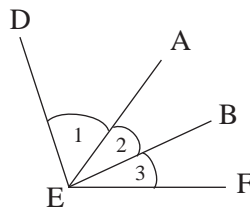
במקרה זה אין לרשום את הסימן  $\sphericalangle$  לפני האותיות. נרשום  $\alpha$ , ולא  $\sphericalangle \alpha$ .

רשמו באמצעות שלוש אותיות את:

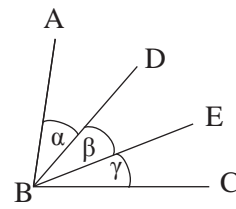
ג. זוויות:  $\sphericalangle 1, \sphericalangle 2, \sphericalangle 3, \sphericalangle 4$



ב. זוויות:  $\sphericalangle E_1, \sphericalangle E_2, \sphericalangle E_3$



א. זוויות:  $\alpha, \beta, \gamma$



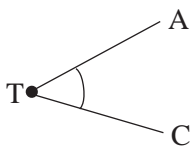
III. סיכום התרגיל

קיימות מספר אפשרויות לסימון זוויות:

✓ באמצעות אות לטינית אחת גדולה,

המציינת את קדקוד הזווית.

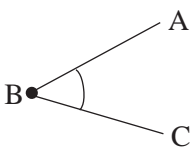
לדוגמה:  $\sphericalangle T$



✓ באמצעות שלוש אותיות, כאשר האות האמצעית

מציינת את קדקוד הזווית.

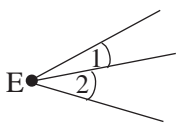
לדוגמה:  $\sphericalangle ABC$  או  $\sphericalangle CBA$



✓ באמצעות מספרים המסומנים בתוך הזווית.

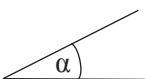
לדוגמה:  $\sphericalangle 1$  או  $\sphericalangle E_1$

$\sphericalangle 2$  או  $\sphericalangle E_2$

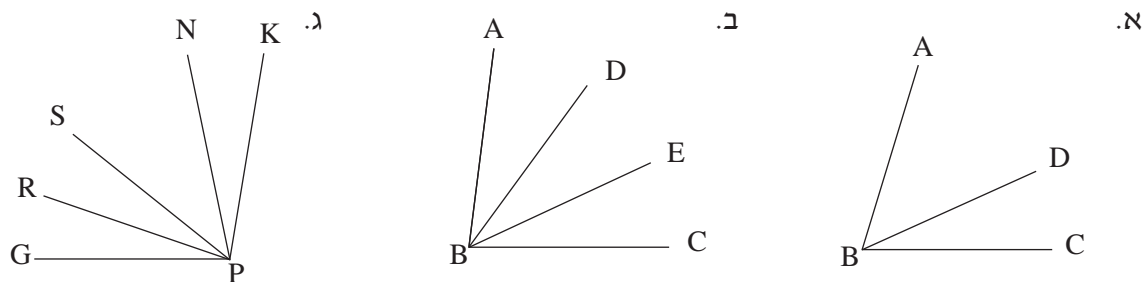


✓ באמצעות אותיות יווניות קטנות.

לדוגמה: זווית  $\alpha$

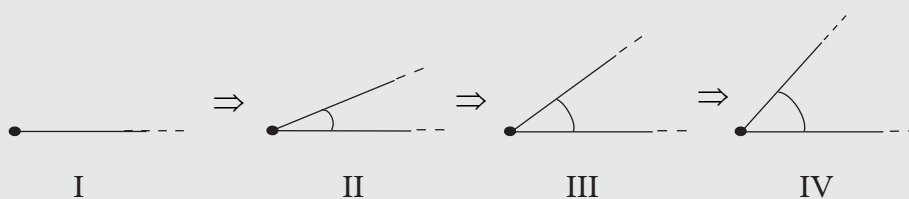


2. רשמו באמצעות שלוש אותיות את השמות של כל הזוויות המופיעות בסרטוט:



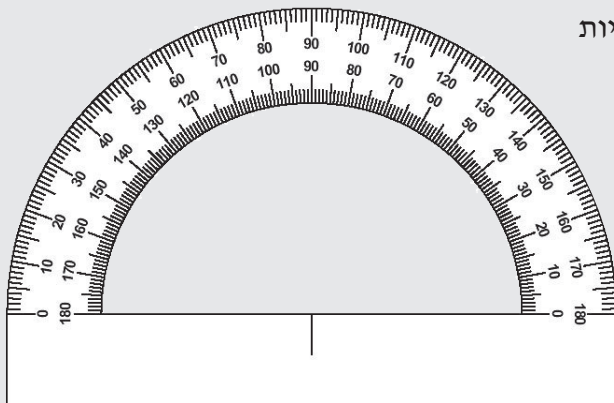
**מדידת הזווית**

✓ גודלה של הזווית נקבע לפי מידת הסיבוב של קרן אחת יחסית לאחרת.  
 יחידת המדידה המקובלת של זווית היא **מעלה**, ורושמים אותה כך:  $1^\circ$  (מעלה אחת).  
 גודלה של זווית שטוחה הוא  $180^\circ$ .  
 לכן זווית בת  $1^\circ$  ניתן להציג כ-  $\frac{1}{180}$  מגודלה של זווית שטוחה.  
 כאשר נמדוד זווית כלשהי, נבדוק כמה זוויות בנות ( $1^\circ$ ) יכולות "להרכיב" את הזווית הנמדדת, ובהתאם לכך נקבע את גודל הזווית.  
 למשל:  $30^\circ, 45^\circ, 52.5^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  וכ'ו'.  
 נתבונן בסרטוט.



במקרה I מתלכדות שתי הקרניים של הזווית ונראות כקרן אחת. גודלה של הזווית בין שתי הקרניים הוא  $0^\circ$  (אפס מעלות).  
 בשלבי המעבר ממקרה I למקרה IV נשארת קרן אחת קבועה, והקרן האחרת מסתובבת ביחס לקרן הראשונה ויוצרת זוויות חדשות, השונות זו מזו בגודלן.

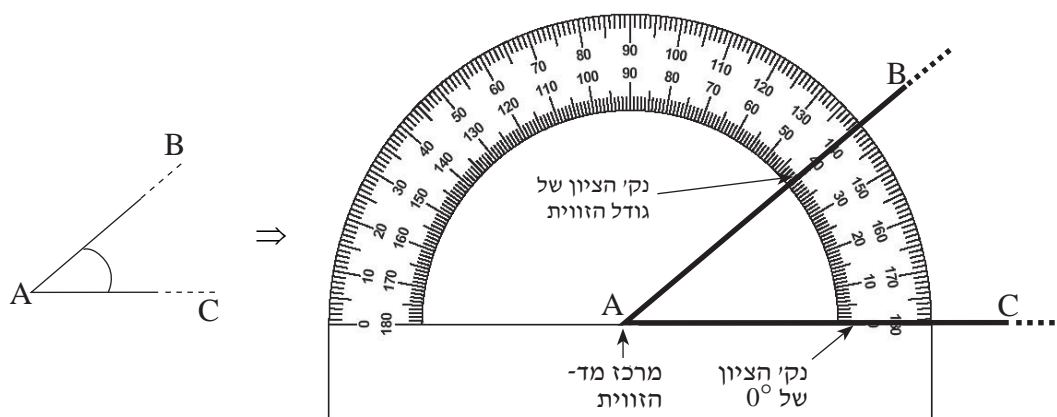
✓ מדידת הזווית מתבצעת באמצעות כלי מיוחד הנקרא **מד-זווית**. הוא בנוי בצורת קשת של



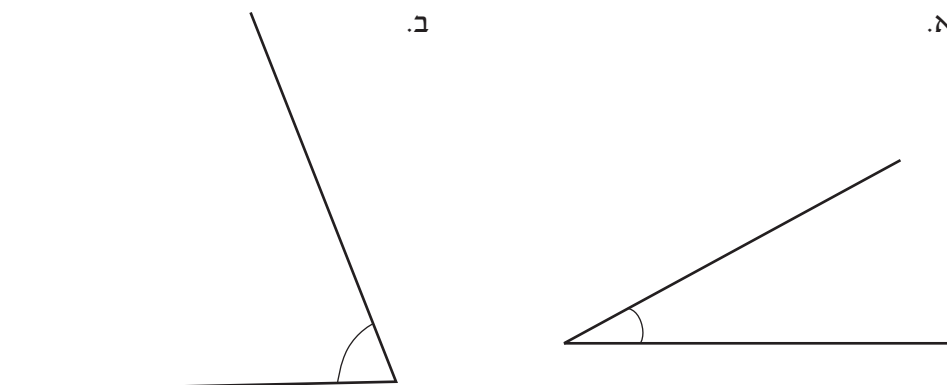
חצי עיגול, ובאמצעותו ניתן למדוד זוויות שגודלן נע בין  $0^\circ$  ל- $180^\circ$ .

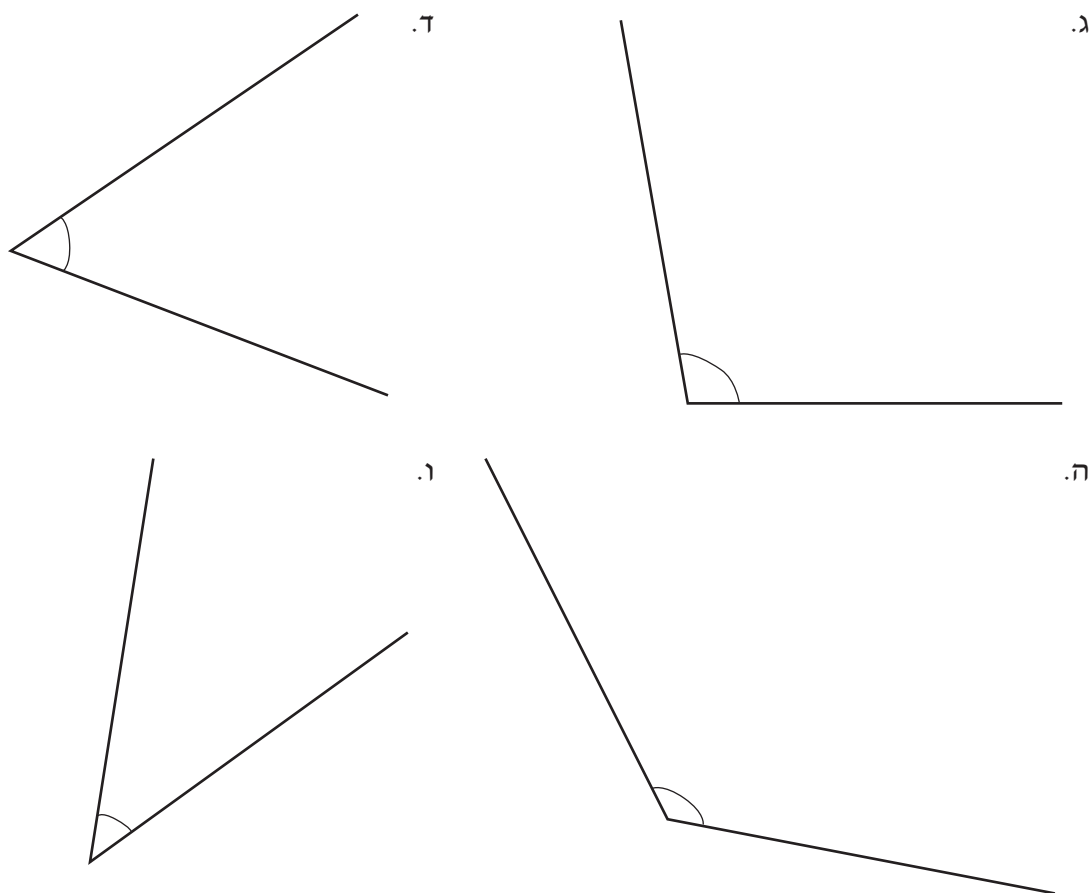
שימו לב! לנוחותנו מסומנות הזוויות על מד-הזווית בשני אופנים:  
 בקשת הפנימית: מ- $0^\circ$  ל- $180^\circ$   
 בסיבוב מימין לשמאל;  
 ובקשת החיצונית: מ- $180^\circ$  ל- $0^\circ$   
 בסיבוב משמאל לימין.

לצורך מדידת גודל הזווית מניחים את מד-הזווית כך, שמרכזו מתלכד עם קדקוד הזווית;  
 ואחת משוקי הזווית מצביעה על  $0^\circ$  (בקשת הפנימית או בקשת החיצונית);  
 וכעת בודקים על איזה מספר במד-הזווית מצביעה השוק השנייה של הזווית.  
 לדוגמה:  
 בסרטוט מודדים את הזווית CAB.  
 לשם כך מניחים את מרכז מד-הזווית כך, שהוא מתלכד עם קדקוד הזווית A,  
 והשוק AC מצביעה על  $0^\circ$  בקשת הפנימית של מד-הזווית.  
 כעת נבדוק על איזה מספר בקשת הפנימית מצביעה השוק AB.  
 אנו רואים שהשוק AB מצביעה על  $40^\circ$ . לכן גודלה של הזווית CAB הוא  $40^\circ$ ,  
 ורושמים:  $\sphericalangle CAB = 40^\circ$ .



**I** מדדו באמצעות מד-זווית את גודל הזוויות שבסרטוטים הבאים.





**II** סרטטו במחברתכם באמצעות מד-זווית את הזוויות הבאות.

- א.  $\sphericalangle ABC = 40^\circ$       ב.  $\sphericalangle KMA = 110^\circ$       ג.  $\sphericalangle E = 65^\circ$       ד.  $\sphericalangle P = 90^\circ$   
 ה.  $\sphericalangle T = 125^\circ$       ו.  $\alpha = 148^\circ$       ז.  $\beta = 78^\circ$       ח.  $\gamma = 180^\circ$

**III** זוויות שוות

שתי זוויות שוות זו לזו, אם ניתן להניח זווית אחת על גבי השנייה באופן שהקדקוד האחד מתלכד עם הקדקוד האחר, וכל אחת משתי הקרניים של הזווית האחת מונחת על גבי כל אחת משתי הקרניים של הזווית האחרת.



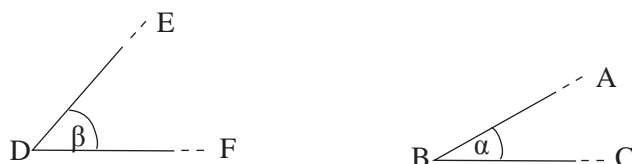
בכתיב מתמטי:  $\alpha = \beta$  או  $\sphericalangle B = \sphericalangle E$  או  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$ .

הערה חשובה!

אורך הקרניים, כפי שהדבר בא לידי ביטוי בסרטוט, אינו רלוונטי לגודל הזווית (ראו סרטוט למעלה).

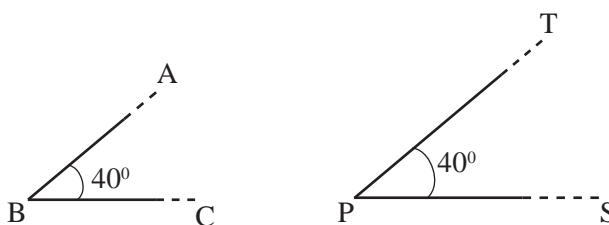
זוויות שונות

אם ניתן להניח זווית אחת על גבי הזווית האחרת כך, שהקדקודים של שתי הזוויות מתלכדים, ובנוסף הקרן של זווית א' מונחת על גבי הקרן של זווית ב', והקרן הנוספת של זווית א' נמצאת בין הקרניים של זווית ב' אזי זווית א' קטנה מזווית ב'.



בכתיב מתמטי:  $\alpha < \beta$  או  $\angle B < \angle D$  או  $\angle ABC < \angle EDF$ .

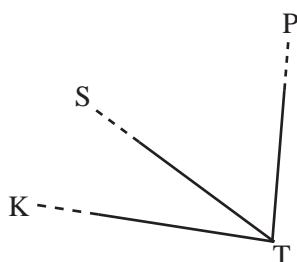
א. ענת טענה כי  $\angle ABC$  קטנה מזווית  $\angle TPS$ . הסבירו מדוע ענת טועה.



ב. הסבירו: מדוע  $\angle KTS$  קטנה מזווית  $\angle STP$ ?

(הדרכה: העתיקו את הזוויות על נייר אפייה או

על נייר שקוף אחר).

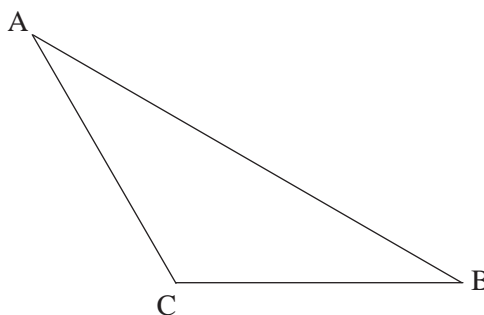
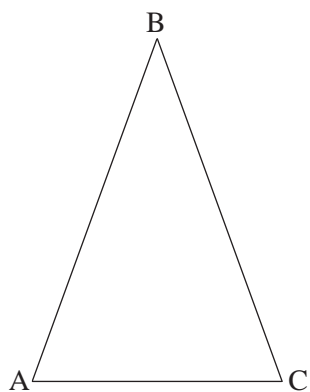
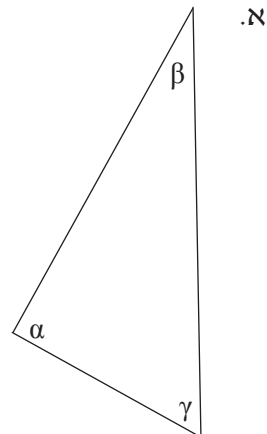
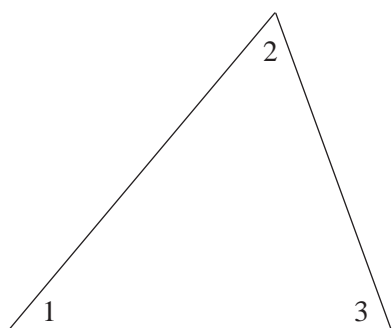


**IV. סיכום התרגיל**

מדידת הזווית

- לצורך מדידת גודל הזווית מניחים את מד-הזווית באופן הבא:
  - ✓ מרכז מד-הזווית מתלכד עם קדקוד הזווית.
  - ✓ אחת משוקי הזווית מצביעה על  $0^\circ$  (בקשת הפנימית או בקשת החיצונית);
  - ובודקים על איזה מספר במד-הזווית מצביעה השוק השנייה של הזווית.
- זוויות שוות:
  - שתי זוויות שוות זו לזו, אם ניתן להניח זווית אחת על גבי הזווית האחרת באופן שהקדקוד האחד מתלכד עם הקדקוד האחר, וכל אחת משתי הקרניים של הזווית האחת מונחת על גבי כל אחת משתי הקרניים של הזווית האחרת.
- זוויות שונות:
  - אם ניתן להניח זווית אחת על גבי הזווית האחרת כך, שהקדקודים של שתי הזוויות מתלכדים, ובנוסף הקרן של זווית א' מונחת על גבי הקרן של זווית ב', והקרן הנוספת של זווית א' נמצאת בין הקרניים של זווית ב' אזי זווית א' קטנה מזווית ב'.

4. I. לפניכם מספר משולשים. באמצעות מד-זווית מדדו בכל אחד מהמשולשים את גודלן של כל אחת משלוש הזוויות, וחשבו את סכומן.

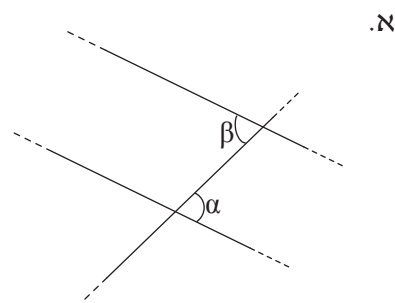
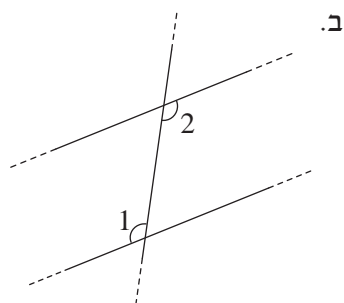
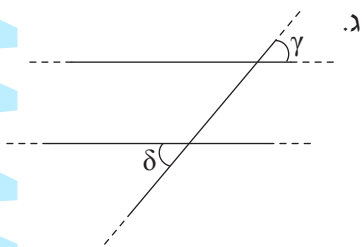


II. סרטטו במחברתכם משולש כלשהו. לדעתכם, מהו סכום כל הזוויות במשולש? אמתו את תשובתכם על-ידי מדידת הזוויות.

5. I. לפניכם זוגות של ישרים מקבילים וישר שלישי החותך אותם.

(1) מדדו באמצעות מד-זווית את הזוויות המסומנות.

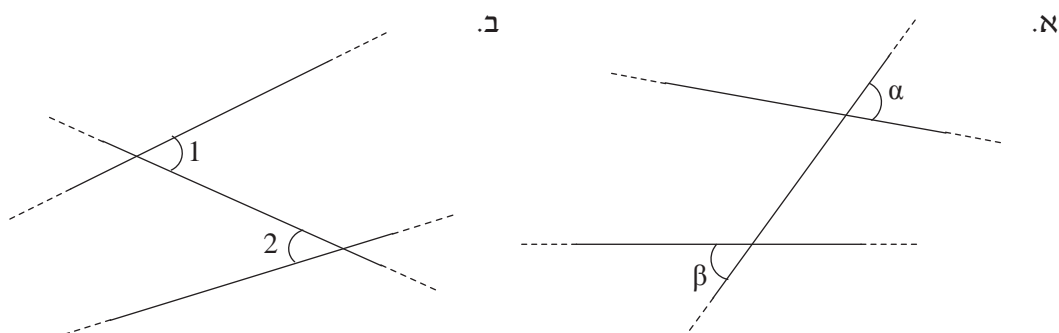
(2) מה ניתן לומר על הזוויות הללו?





II. לפניכם זוגות של ישרים לא מקבילים וישר שלישי החותך אותם.

מדדו באמצעות מד-זווית את הזוויות המסומנות, וקבעו אם הן שוות או לא.



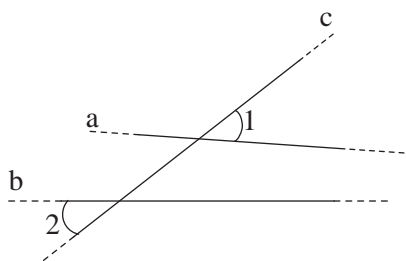
III. נתונים שני ישרים a ו-b, הנחתכים על-ידי ישר שלישי c

(ראו סרטוט סכמתי).

הסתמכו על סעיפים I ו-II, וציינו מה ניתן לומר על

גודלן של הזוויות 1 ו-2 המסומנות בסרטוט,

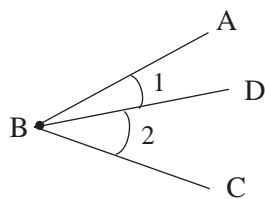
אם ידוע כי:



א. ישרים a ו-b אינם מקבילים זה לזה.

ב. ישרים a ו-b מקבילים זה לזה.

**חיבור זוויות**

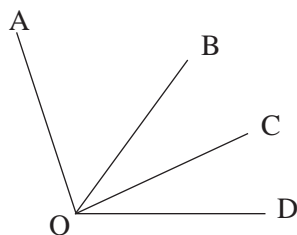


$\sphericalangle ABC$  היא סכום הזוויות  $\sphericalangle ABD$  ו- $\sphericalangle DBC$ .

בכתיב מתמטי:

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle B_1 + \sphericalangle B_2$  או  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC$

רשמו באמצעות זווית אחת (שלוש אותיות) את סכום הזוויות הבאות:



א.  $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$

ב.  $\sphericalangle BOC + \sphericalangle COD$

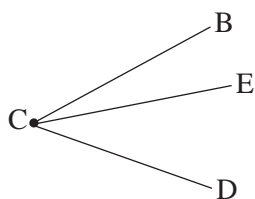
ג.  $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COD$

ד.  $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOD$

ה.  $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD$

**חיסור זוויות**

**II.**

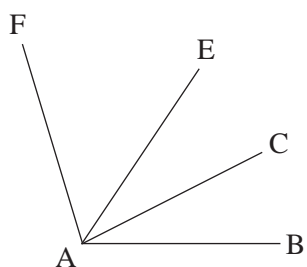


$\sphericalangle ECD$  היא הפרש הזוויות  $\sphericalangle BCD$  ו- $\sphericalangle BCE$ .

בכתיב מתמטי:

$$\sphericalangle ECD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCE$$

רשמו באמצעות זווית אחת (שלוש אותיות) את הפרש הזוויות הבאות:



א.  $\sphericalangle FAC - \sphericalangle EAC$

ב.  $\sphericalangle EAB - \sphericalangle CAB$

ג.  $\sphericalangle FAB - \sphericalangle FAE$

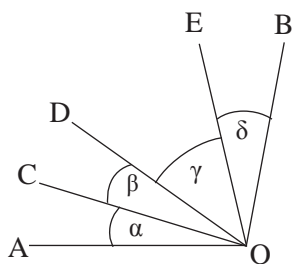
ד.  $\sphericalangle FAC - \sphericalangle FAE$

ה.  $\sphericalangle FAB - \sphericalangle FAE - \sphericalangle EAC$

**III. סיכום התרגיל**

למצוא סכום (או הפרש) של זוויות מבצעים את הפעולה המתאימה - חיבור (או חיסור) - של הזוויות בעלות קדקוד משותף ושוק משותפת.

7. נתון:  $\alpha = 16^\circ$ ,  $\beta = 27^\circ$ ,  $\gamma = 35^\circ$ ,  $\delta = 20^\circ$ .



חשבו את הזוויות הבאות:

א.  $\sphericalangle AOB$

ד.  $\sphericalangle AOE$

ב.  $\sphericalangle COE$

ה.  $\sphericalangle AOD$

ג.  $\sphericalangle COB$

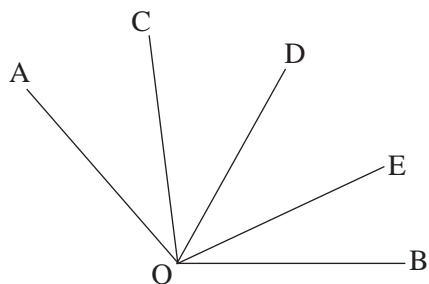
ו.  $\sphericalangle DOB$

8. מדדו באמצעות מד-זווית כל אחת מארבע הזוויות הבאות:

$\sphericalangle AOC$ ,  $\sphericalangle COD$ ,  $\sphericalangle DOE$ ,  $\sphericalangle EOB$

על סמך מדידות אלו חשבו את הזוויות הבאות, ובדקו

את התוצאות שקיבלתם באמצעות מד-הזווית:



א.  $\sphericalangle AOD$

ד.  $\sphericalangle COE$

ב.  $\sphericalangle AOE$

ה.  $\sphericalangle COB$

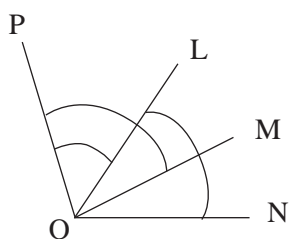
ג.  $\sphericalangle AOB$

ו.  $\sphericalangle DOB$

9. נתון:  $\angle LON = 75^\circ$ ,  $\angle POM = 80^\circ$ ,  $\angle POL = 50^\circ$ .

חשבו את הזוויות הבאות:

- א.  $\angle LOM$       ב.  $\angle MON$



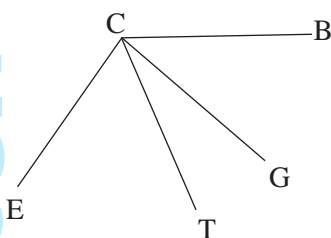
10. מדדו באמצעות מד-זווית כל אחת משלוש הזוויות הבאות:

$\angle GCE$ ,  $\angle BCT$ ,  $\angle BCG$

על סמך מדידות אלו חשבו את הזוויות הבאות, ובדקו

את התוצאות שקיבלתם באמצעות מד-הזווית:

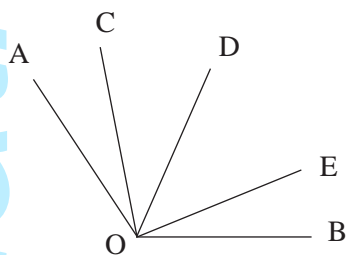
- א.  $\angle GCT$       ב.  $\angle TCE$       ג.  $\angle ECB$



11. נתון:  $\angle AOC = 20^\circ$ ,  $\angle AOD = 47^\circ$ ,  $\angle EOB = 30^\circ$ ,  $\angle DOB = 70^\circ$ .

חשבו את הזוויות הבאות:

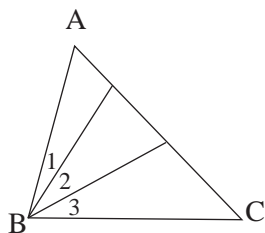
- א.  $\angle COD$       ד.  $\angle AOE$   
 ב.  $\angle DOE$       ה.  $\angle COB$   
 ג.  $\angle COE$       ו.  $\angle AOB$



12. במשולש  $\triangle ABC$  נתון:

$\angle B_1 = 20^\circ$ ,  $\angle ABC = 80^\circ$ ,  $\angle B_2 = \angle B_3$

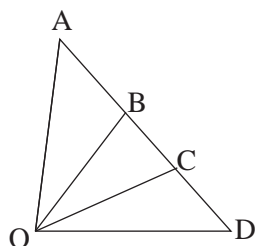
מה גודלה של זווית  $\angle B_3$ ?

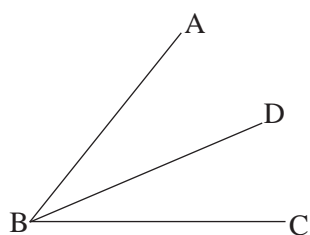


13. במשולש  $\triangle AOD$  נתון:  $\angle AOC = 50^\circ$ ,  $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$ .

חשבו את הזוויות הבאות:

- א.  $\angle AOB$       ב.  $\angle BOD$       ג.  $\angle AOD$



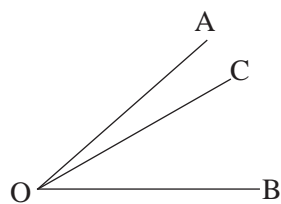


14. נתון:  $\angle ABC = 54^\circ$ ,  $\angle ABD = \frac{\angle ABC}{2}$ .

חשבו את הזוויות הבאות:

א.  $\angle ABD$

ב.  $\angle DBC$

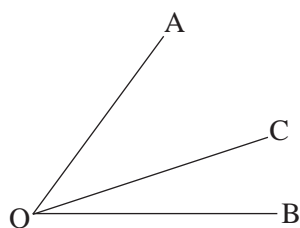


15. נתון:  $\angle AOB = 42^\circ$ ,  $\angle AOC = \frac{1}{3} \cdot \angle AOB$ .

חשבו את הזוויות הבאות:

א.  $\angle AOC$

ב.  $\angle COB$

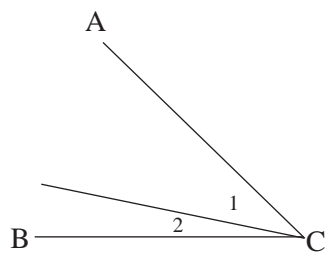


16. נתון:  $\angle COB = 18^\circ$ ,  $\angle AOC = 2 \cdot \angle COB$ .

חשבו את הזוויות הבאות:

א.  $\angle AOC$

ב.  $\angle AOB$

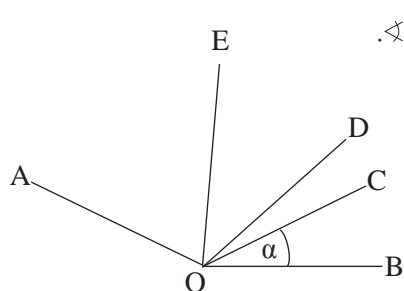


17.  $\angle C_1$  גדולה פי 3 מ-  $\angle C_2$ . נתון:  $\angle C_2 = 11^\circ$ .

חשבו את הזוויות הבאות:

א.  $\angle C_1$

ב.  $\angle ACB$



18. נתון:  $\angle AOE = 2\alpha$ ,  $\angle DOC = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\angle EOD = \alpha + 10^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

חשבו את הזוויות הבאות:

א.  $\angle DOC$

ב.  $\angle EOD$

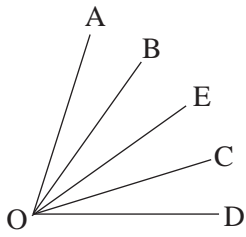
ג.  $\angle AOE$

ד.  $\angle DOB$

ה.  $\angle EOB$

ו.  $\angle AOC$

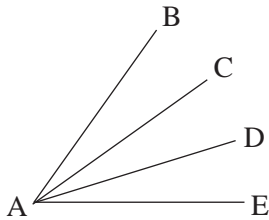
ז.  $\angle AOB$



19. נתון:  $\angle BOE = \angle COE$ ,  $\angle AOB = \angle DOC$  \*  
הסבירו: מדוע  $\angle AOE = \angle EOD$ ?

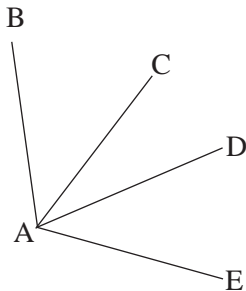
(הדרכה: ניתן להסביר לגבי מקרה פרטי.)

קבעו את גודל הזוויות כרצונכם והסבירו.)



20. נתון:  $\angle BAC = \angle EAD$  \*  
הסבירו: מדוע  $\angle BAD = \angle EAC$ ?

(הדרכה: ניתן להסביר לגבי מקרה פרטי.)



21. נתון:  $\angle BAD = \angle EAC$  \*  
הסבירו: מדוע  $\angle BAC = \angle EAD$ ?

(הדרכה: ניתן להסביר לגבי מקרה פרטי.)

## סיכום הפרק

(זוויות - מבוא)

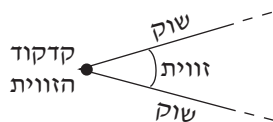


### • זווית

נוצרת על-ידי שתי קרניים היוצאות מנקודה אחת.

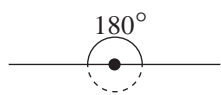
הנקודה נקראת **קדקוד הזווית**.

הקרניים נקראות **שוקי הזווית**.



### • זווית שטוחה

זווית ששוקיה יוצרות ישר.

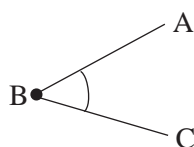


### • סימון הזווית

✓ על-ידי שלוש אותיות לטיניות גדולות וסימן  $\sphericalangle$  לפנין.

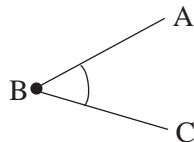
האות האמצעית מציינת את קדקוד הזווית.

בכתיב מתמטי:  $\sphericalangle ABC$ .



✓ על-ידי אות לטינית אחת גדולה, שמציינת את קדקוד הזווית.

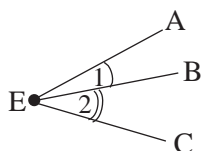
בכתיב מתמטי:  $\sphericalangle B$ .



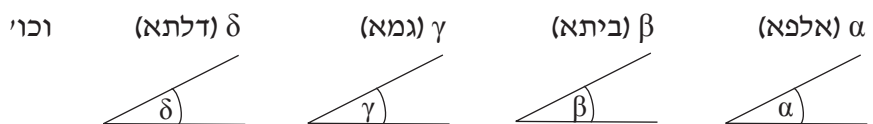
✓ על-ידי מספרים המסומנים בתוך הזווית.

בכתיב מתמטי:  $\sphericalangle E_1$  או  $\sphericalangle 1$ .

בכתיב מתמטי:  $\sphericalangle E_2$  או  $\sphericalangle 2$ .



✓ על-ידי אותיות יווניות קטנות:



במקרה זה אין לרשום את הסימן  $\sphericalangle$  לפני האותיות. נרשום  $\alpha$ , ולא  $\sphericalangle \alpha$ .

### • מדידת הזווית

✓ גודלה של הזווית נקבע לפי מידת הסיבוב של קרן אחת יחסית לאחרת.

יחידת המדידה המקובלת של זווית היא **מעלה**, ורושמים אותה כך:  $1^\circ$  (מעלה אחת).

גודלה של זווית שטוחה הוא  $180^\circ$ .

לכן, זווית בת  $1^\circ$  ניתן להציג כ-  $\frac{1}{180}$  מגודלה של זווית שטוחה.

### סיכום - המשך

✓ לצורך מדידת גודל הזווית מניחים את מד-הזווית באופן הבא:

מרכז מד-הזווית מתלכד עם קדקוד הזווית;

אחת משוקי הזווית מצביעה על  $0^\circ$  (בקשת הפנימית או בקשת החיצונית);

בודקים על איזה מספר במד-הזווית מצביעה השוק השנייה של הזווית.

#### • זוויות שוות

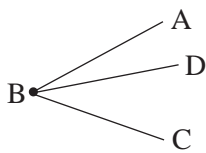
שתי זוויות שוות זו לזו, אם ניתן להניח זווית אחת על גבי הזווית השנייה באופן שהקדקוד האחד מתלכד עם הקדקוד האחר, וכל אחת משתי הקרניים של הזווית האחת מונחת על גבי כל אחת משתי הקרניים של הזווית האחרת.

#### • זוויות שונות

אם ניתן להניח זווית אחת על גבי הזווית האחרת כך, שהקדקודים של שתי הזוויות מתלכדים, ובנוסף הקרן של זווית א' מונחת על גבי הקרן של זווית ב', והקרן הנוספת של זווית א' נמצאת בין הקרניים של זווית ב' אזי זווית א' קטנה מזווית ב'.

#### • חיבור זוויות

$\sphericalangle ABC$  היא סכום הזוויות  $\sphericalangle ABD$  ו- $\sphericalangle DBC$ .



#### • חיסור זוויות

$\sphericalangle ECD$  היא הפרש הזוויות  $\sphericalangle BCD$  ו- $\sphericalangle BCE$ .

